סיבוכיות מקום

שבוע שעבר: $\mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right) \subset \mathrm{DSPACE}\left(O\left(\log\log n\right)\right)$

היום: נוכיח שזהו חסם הדוק:

טענה

$$\mathrm{DSPACE}\left(o\left(\log\log n\right)\right) = \mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right)$$

הוכחה

נראה $\mathrm{DSPACE}\left(o\left(\log\log n\right)\right) \subseteq \mathrm{DSPACE}\left(O\left(1\right)\right)$.

תהי $L \in \mathrm{DSPACE}\left(s\left(n\right)\right)$ כאשר $s \in o\left(\log\log n\right)$. $\Longleftarrow$ קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית M המכריעה את L בסיבוכיות מקום $s\left(n\right)$.

הרעיון: נראה שקיים קבוע c כך שלכל קלט x, סיבוכיות המקום של M היא c.

נראה שקיים קבוע n_0 כך שלכל קלט x, סיבוכיות המקום של M היא לכל היותר $s\left(n_0\right)$.

עבור קלט x, נבחין בין שני מקרים:

א. אם $|x| \leq n_0$, מכיוון שסיבוכיות המקום של M היא $s\left(n\right)$, זה מתקיים באופן טריוויאלי.

ב. עבור $|x| > n_0$, נראה שקיים x' כך ש$|x'| \leq n_0$ וסיבוכיות המקום של $M\left(x\right)$ שווה לסיבוכיות המקום של $M\left(x'\right)$.

נגדיר: "חצי קונפיגורציה"

1. התו הנוכחי על סרט הקלט
2. מיקום הראש על סרט העבודה
3. תוכן סרט העבודה
4. מצב המכונה

מספר חצאי הקונפיגורציות: $2^{s(n)} \cdot s\left(n\right) = t\left(n\right)$.

עבור קלט x ואינדקס i, נסמן בC_i את סדרת חצאי הקונפיגורציות של כל הפעמים ש$M\left(x\right)$ נמצאת במיקום הi על סרט הקלט.

מה מספר האפשרויות לסדרות מהסוג הנ"ל(עבור i קבוע)?

$$\begin{pmatrix} \text{number of possibilities} \\ \text{for a member in the series} \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} \text{maximal length} \\ \text{of series} \end{pmatrix}} \leq t\left(n\right)^{t(n)}$$

$$t\left(n\right)^{t(n)} \in O\left(2^{2^{s(n)}}\right)$$

$\Longleftarrow$ לכל i, מספר הC_iים האפשרי הוא $O\left(2^{2^{s(n)}}\right)$

טענה: עבור $s(n) \in o(\log\log n)$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $O\left(2^{2^{s(n)}}\right) < \frac{n}{2}$.

$\Longleftarrow$ קיימים i, j, k עבורם $C_i = C_j = C_k$. אבל אז בכל פעם שאנחנו נמצאים במיקום i, יש לנו בדיוק אותו מידע שיש לנו במיקום הj, כלומר אם

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline w_0 & \alpha & w_1 & \alpha & w_2 & \alpha & w_3 \\ \hline & C_i & & C_j & & C_k & \\ \hline \end{array}$$

$$x' = w_0 \alpha w_2 \alpha w_3$$

$$x'' = w_0 \alpha w_1 \alpha w_3$$

טענה: סיבוכיות המקום של $M(x)$ = סיבוכיות המקום של $M(x')$ <u>או</u> סיבוכיות המקום של $M(x'')$

נניח בה"כ שסיבוכיות המקום של $M(x)$ = סיבוכיות המקום של $M(x')$. שני מקרים:

א. אם $|x'| \leq n_0$, סיבוכיות המקום של $M(x') \leq s(n_0)$ $\Longleftarrow$ סיבוכיות המקום של $M(x')$ היא $\geq s(n_0)$ וסיימנו.

ב. אם $|x'| > n_0$, נפעיל את אותו הטיעון על x' ונקבל x''' כך ש$|x'''| < |x'|$ וסיבוכיות המקום של $M(x')$ = סיבוכיות המקום של $M(x''')$.

■